සුජාතා විද්‍යාලය - මාතර

පෙරහුරු පරීක්ෂණය - 2017 (ජූනි)

සංයුක්ත ගණිතය I

13 ශ්‍රේණිය | **10 S I** | **කාලය පැය : 03**

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.
  A – කොටස ප්‍රශ්න 10 සහ B කොටස ප්‍රශ්න 07

- A – කොටස
  සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න.

- B – කොටස
  ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

පරීක්ෂකගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

A කොටස	
ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
එකතුව	

B කොටස	
ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
එකතුව	

	ලකුණු
A කොටස	
B කොටස	
එකතුව	

Scanned by CamScanner

A කොටස

ප්‍රශ්න සියල්ලටම පිළිතුරු සපයන්න.

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන් $n \in z^{+}$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1}$ බව පෙන්වන්න.

2. එකම රූප සටහනක $y = |x+2|$ හා $y = 4|x-3|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.
එනයින් $|x+2| > 4|x-3|$ අසමානතාවය සපුරාලන x හි සියලුම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

Scanned by CamScanner

03. $(x + iy)^3 = a + ib$ වේ නම්, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 4(a^2 - b^2)$ බව පෙන්වන්න. [$x, y, a, b \in \mathbb{R}$ වේ.]

04. *DODANGASLANDA* යන වචනයෙන් වරකට අකුරු 4 බැගින් ගත හැකි සංයෝජන ගණන සොයන්න.

Scanned by CamScanner

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}$$ බව පෙන්වන්න.

තාත්ත්වික θ පරාමිතියක් ඇසුරින් xy තලයේ C වක්‍රයක් $x = a\cos^3 \theta,\ y = a\sin^3 \theta$ යන සමීකරණ මගින් දෙනු ලැබේ. $\frac{dy}{dx}$ ව්‍යුත්පන්නය θ ඇසුරින් සොයා $\theta = \frac{\pi}{4}$ වන ලක්ෂ්‍යයේ දී, C වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $\sqrt{2}(x + y) = a$ බව පෙන්වන්න.

Scanned by CamScanner

$P \equiv (2, -1)$, $Q \equiv (4, -3)$ යයි ගනිමු. PQ හි ලම්බ සමච්ඡේදකය මත $R \equiv (3t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$ පිහිටා ඇත. t හි අගය සොයා $PRQS$ රොම්බසයක් වන පරිදි S ලක්ෂයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

08. a, b, c නියත වන $ax^2 + 2y^2 + bxy + x + 4y + 2c = 0$ සමීකරණය මගින් වෘත්තයක් නිරූපණය වීම සඳහා a සහ b හි අගයන් සොයන්න.

$c < \frac{17}{16}$ විය යුතු බව ද පෙන්වන්න.

c හි ධන නිඛිලමය අගය සඳහා ඉහත වෘත්තය $(x+p)^2 + y^2 = p^2$ වෘත්තය මගින් සමච්ඡේද වේ නම් නියතයෙහි අගය සොයන්න.

Scanned by CamScanner

09. $\int_{-2}^{2} |x+1|\,dx$ හි අගය සොයන්න.

10. සුපුරුදු අංකනයෙන් ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා $a - b = c$ නම්,
$\sin\frac{(A-B)}{2} = \cos\frac{C}{2}$ බව පෙන්වන්න.

Scanned by CamScanner

- ප්‍රශ්න 05 කට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a) b හා c තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වූ $x^2 + bx + c = 0$ වර්ගජ සමීකරණයෙහි මූල α හා β යැයි ගනිමු.
මූල $p = \alpha + \beta^2$ හා $q = \beta + \alpha^2$ වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න.
α හා β අතාත්වික වන විට, $b = -1$ නම් හා නම්ම පමණක් p හා q තාත්ත්වික බවත් මෙම අවස්ථාවේ දී $p = q = 1 - c$ බවත් පෙන්වන්න.

(b) $x^2 + kx + 1$ ප්‍රකාශනය $x^4 - 12x^2 + 8x + 3$ හි සාධකයක් වීම සඳහා k ට තිබිය හැකි අගය සොයා.
නයින්, $x^4 - 12x^2 + 8x + 3 = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

(c) $f(x) = x^2 + 6x + 20 + \lambda(x^2 - 3x - 12)$, $x \in \mathbb{R}$ ලෙස ගනිමු. මෙහි λ පරාමිතියකි.
(i) $f(x)$ ඒකජ බහුපදයක් වන පරිදි λ හි අගය සොයන්න.
(ii) $f(x) = 0$ සමීකරණයේ මූල විශාලත්වයෙන් සමාන හා ලකුණින් ප්‍රතිවිරුද්ධ වේ නම් λ හි අගය සොයන්න.
(ii) $f(x)$ වර්ගජ බහුපදයක් ලෙස උපකල්පනය කරමින් එය $f(x) = h - b(x-a)^2$ ආකාරයට වන පරිදි a, b, h යන පද λ ඇසුරින් සොයන්න.
$x = 2$ දී $f(x)$ ට වැඩිතම අගයක් පවතී නම් λ හි අගය සොයා $f(x)$ හි වැඩිතම අගය ද සොයන්න.

12. (i) ඕනෑම n ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා $(a+b)^n$ හි ප්‍රසාරණය ලියා දක්වන්න. මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.
ඒ නයින් $\sum_{r=0}^{n} {}^{n}c_r = 2n$ සහ $\sum_{r=0}^{n} ({}^{n}c_r)^2 = {}^{2n}c_n$ බව අපෝහනය කරන්න.

$a + b = 1$ වන විට, $\sum_{r=1}^{n} r\, {}^{n}c_r\, a^r b^{n-r} = na$ බව ද පෙන්වන්න.

(ii) r වන පදය u_r වන ශ්‍රේණියක මුල් පද n හි එකතුව $\sum_{r=1}^{n} u_r = \frac{n}{12}(n+1)(n+2)(n+3)$ බව දී ඇත.
$1 \le r \le n$ වේ.
$\frac{1}{u_r} = k\{f(r) - f(r+1)\}$ වන පරිදි $f(r)$ ශ්‍රිතය සහ k නියතය සොයා එමගින් $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{u_r}$ ලබා ගන්න.
$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{u_r}$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වන්න.

13. (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ සහ $f(x) = x^2 - 3x - 27$ නම්, $f(A)$ සොයන්න. මෙහි $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ වේ.
$B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ නම්, $A^T + B^T$ සොයන්න.
න්‍යාස භාවිතයෙන්, $x - y = 4$, $2x + 3y = 3$ සමගාමී සමීකරණ විසඳන්න.

(b) $\bar{z}$ යනු z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ ප්‍රතිබද්ධය නම්,
(අ) (i) $z\bar{z} = |z|^2$ බව පෙන්වන්න.
(ii) $z = z_1 + z_2$ නම් $\bar{z} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ බව පෙන්වන්න.
(iii) z_1, z_2 හා z_3 යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නම්,
$z_1 + z_2 + z_3 = 0$ විට, $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 = 0$ බව පෙන්වන්න.

Scanned by CamScanner

(ආ) P_0, P_1 හා P_2 ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් z_0, z_1 හා z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරනු ලැබේ මගින් $P_0P_1 = P_0P_2$ නම ද $P_1\widehat{P_0}P_2 = \alpha$ නම් ද $(z_2 - z_0) = (z_1 - z_0)(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)$ බව සාධනය කරන්න.

(ඇ) A, B, C, D යනු රොම්බසයක අනුපිළිවෙලින් වාමාවර්තව ගත් ශීර්ෂ වේ. A හා B පිළිවෙළින් i හා 1 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි නම්, හා $A\hat{B}C = \frac{\pi}{6}$ නම් C හා D මගින් නිරූපණය කෙරෙන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

14. (a) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{\pi} - \sqrt{2x}}$

(b) $x = a[\cot t + \ln\tan(t/2)]$

$y = a\sin t$ නම්, $\frac{dy}{dx} = \tan t$ බව පෙන්වා $\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{t=\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}}{a}$ බව ද පෙන්වන්න.

(c) ධාරිතාව $24\pi\ cm$ වූ ද මුදුන විවෘතව ඇත්තා වූ ද වෘත්තාකාර සිලින්ඩරාකාර භාජනයක් තැනීමට අවශ්‍යව ඇත. වක්‍ර කොටස සඳහා භාවිතා කරන ලද අමුද්‍රව්‍යවල වර්ග සෙන්ටි මීටරයක් ($1\ cm^2$ ක්) සඳහා ගිය වියදම e වන අතර එමෙන් තුන් ගුණයක් පතුල සඳහා භාවිතා කරන ලද අමුද්‍රව්‍ය වර්ග සෙන්ටි මීටරයක් සඳහා වියදම් වේ. වෘත්තාකාර කොටසේ අරය r නම් ද මුලු වියදම E නම් ද,

(i) $E = \pi e\,[3r^2 + 48/r]$ බව පෙන්වන්න.

(ii) අමුද්‍රව්‍ය අපතේ නොගියේ නම් වියදම අවම වන සේ r හි අගය ද සිලින්ඩරයේ උස ද සොයන්න.

15. (a) සුදුසු ආදේශයකින් $\int_0^{3/2} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$ අගයන්න.

(b) $\int \frac{(3x+5)dx}{(x-1)^2(x+1)}$,

(c) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int_2^4 x\ln x\ dx = a\ln b + c$ බව පෙන්වන්න.

මෙහි a, b, c යනු නිර්ණය කළ යුතු නිඛිල වේ.

16. (a) (i) (α, β) යන ලක්ෂයේ $lx + my + n = 0$ යන රේඛාව මත ඇති ප්‍රතිබිම්බයේ ඛණ්ඩාංක $\left[\alpha - \frac{2l\,(l\alpha+m\beta+n)}{l^2+m^2}\,,\ \beta - \frac{2m(l\alpha+m\beta+n)}{l^2+m^2}\right]$ බව පෙන්වන්න.

(ii) ABC ත්‍රිකෝණයේ A, B, C ශීර්ෂ පිහිටා තිබෙන්නේ පිළිවෙලින් $y = x$, $y = 2x$, $y = 3x$ යන රේඛා මත ය. AB පාදයේ ලම්බ සමච්ඡේදකයේ සමීකරණය $6x + 8y - 3 = 0$ වන අතර BC පාදය $11x - 4y = 0$ යන රේඛාවට සමාන්තරය. A හා B ලක්ෂ වල ඛණ්ඩාංක ද ත්‍රිකෝණයේ BC පාදයේ සමීකරණය ද සොයන්න. [(i) හි ලබාගත් ප්‍රතිබිම්බයේ ඛණ්ඩාංක භාවිතයෙන්]

(b) $A \equiv (0, a)$ සහ $B \equiv (0, -a)$ තුළින් යන S , S^1 වෘත්ත දෙක $y = mx + C$ රේඛාව ස්පර්ශ කරයි. S හා S^1 වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ නම් $C^2 = a^2(2 + m^2)$ බව පෙන්වන්න.

$y = \sqrt{2}\,x + 2$ රේඛාව S, S^1 ස්පර්ශ වේ නම් A, B ලක්ෂවල ඛණ්ඩාංක අපෝහනය කරන්න.

Scanned by CamScanner

7. (a) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සම්මත අංකනයට අනුව ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $\frac{1}{2}ab\sin C$ බව පෙන්වන්න. ඒ මගින් සයින් ප්‍රමේයය අපෝහනය කරන්න.

(b) ABC ත්‍රිකෝණයේ A අභ්‍යන්තර කෝණ සමච්ඡේදකයේ BC පාදය D හි දී හමුවේ නම් $AD = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(c) ADB කෝණයේ අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදකය AB පාදය E හි දී හමුවේ නම් $\frac{AE}{EB}$ අනුපාතය සොයන්න.

(d) $\cos 2x = \cos x - \sin x$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.

(e) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x-1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{x+1}\right) = \tan^{-1}\frac{1}{2}$ සමීකරණ විසඳන්න.

Scanned by CamScanner